

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ARAGÓN

DIVISIÓN DE LAS CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS Y DE LAS INGENIERÍAS

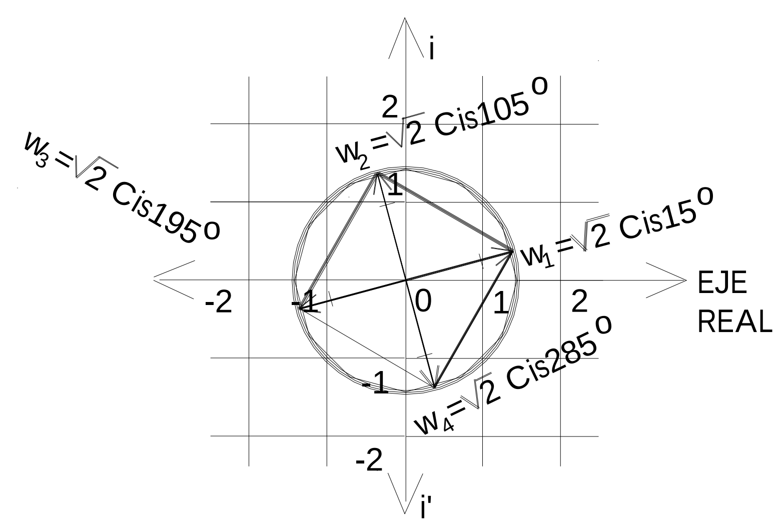
INGENIERÍA MECÁNICA-ELÉCTRICA

APUNTES

ÁLGEBRA

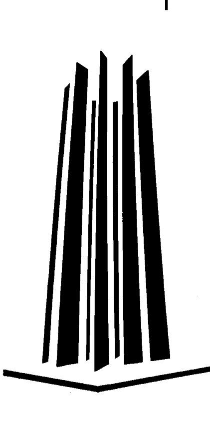
NÚMEROS COMPLEJOS







Ing. Francisco Raúl Ortíz González



,2008.

Surge de la necesidad de que el alumno de ingeniería pueda utilizarlo como una herramienta de apoyo para el estudio de la materia de Álgebra en el TEMA II, denominado "NÚMEROS COMPLEJOS" del programa actual, así como de materias afines.

Cumple con el objetivo de dicho tema en lo referente a la adquisición de destreza en el manejo formal de los números complejos en sus diferentes representaciones, para aplicarlos en la resolución de ecuaciones con una incógnita que involucren a dichos números.

Y por último, quiero dar las gracias al M. en I. Alberto Reyes Solís por sus observaciones tan atinadas para la realización de este texto.

ATENTAMENTE

Ing. Francisco Raúl Ortíz González

,2008.

CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

En ocasiones los resultados de muchas ecuaciones cuadráticas no pertenecen al conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$). Por ejemplo, para resolver la siguiente ecuación:

$x^2 + x + 1 = 0$ que pertenece a la forma general $ax^2 + bx + c = 0$. Donde: $a = 1$, $b = 1$ y $c = 1$ son los coeficientes, siendo c el término independiente.

También esta expresión matemática es un trinomio cuadrático primo, por lo que no se puede factorizar. Para ello se emplea la fórmula cuadrática para poder resolverla.

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ que al sustituir los valores resulta lo siguiente:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Por lo que:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Donde x_1 y x_2 deberían ser la solución de dicha ecuación cuadrática, sólo que el valor de $\sqrt{-3}$ no existe en el conjunto de los números reales. Durante muchos años se consideró que los números como: $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-9}$ no tenían sentido, ya que no existía un número real cuyo cuadrado sea igual a – 3, por lo que $\sqrt{-3}$ no podía ser considerado como un número real.

1.1. ORÍGENES

Los grandes matemáticos de la antigüedad descubrieron que el sistema de números reales estaba de cierta manera incompleto, esto a consecuencia de que al tratar de obtener la solución de ciertas ecuaciones cuadráticas tal como:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

El resultado de x_1 y x_2, no se encontraba dentro de los números reales ($\mathbb{R}$), ya que: $x_1 = 1 + \sqrt{-1}$ y $x_2 = 1 - \sqrt{-1}$ no existían.

Para ello en el siglo XVII, René Descartes (1596-1650), llamó números imaginarios a todo aquel número real negativo que se encontrara en el interior de un radical.

Después de esta declaración, los números imaginarios fueron atacados y declarados por muchos matemáticos como “imposibles” o “inexistentes”, a consecuencia de que no podían ser relacionados con experiencias de la vida normal.

Por ejemplo, la ecuación cuadrática también conocida como ecuación de segundo grado o polinomio de grado dos $x^2 + 1 = 0$ no se iba a quedar sin solución.

Es por ello que las matemáticas requerían de los números imaginarios para obtener la solución. Finalmente estos se impusieron, a consecuencia de que el número imaginario presenta una idea abstracta y precisa.

Actualmente, los números imaginarios son de gran importancia por tener grandes usos, tal como la descripción de la corriente alterna en la electricidad.

¿Qué número al ser multiplicado por sí mismo es igual a – 1?, para ello Euler concibió que con la ayuda de la *unidad imaginaria* representada por medio del símbolo “i”, se estableciera una igualdad, por lo que: $i = \sqrt{-1}$, que al sustituirlo en: $x_1 = 1 + \sqrt{-1}$ y $x_2 = 1 - \sqrt{-1}$, resultaba lo siguiente:

$x_1 = 1 + i$ y $x_2 = 1 - i$ *que* es la solución de la ecuación cuadrática $x^2 - 2x + 2 = 0$.

Cuyos resultados pertenecen al conjunto de los **números complejos**, por ser los números imaginarios un subconjunto de dicho sistema numérico.

2. LOS NÚMEROS COMPLEJOS (Z)

Los números complejos se representan básicamente en tres formas, que son: binómica, polar o trigonométrica, y la exponencial o de Euler. Siendo la razón principal de que algunas soluciones de problemas se pueden facilitar más de una forma que de otra.

2.1. FORMA BINÓMICA

Un número complejo es toda aquella expresión algebraica o matemática de la forma:

$Z = a + bi$ siendo ésta la llamada *forma binómica* de los números complejos.

Donde: a y b son dos *número reales*, e i es la *unidad imaginaria,* recordando que $i = \sqrt{-1}$. Por lo que $x_1 = 1 + \sqrt{-1} = 1 + i$ y $x_2 = 1 - \sqrt{-1} = 1 - i$; estableciendo que $a = 1$ y $b = 1$.

Siendo $a + bi$ la suma de un número real con un número imaginario, y $a - bi$ la resta de un número real con un número imaginario

Ahora bien, cuando $a = 0$, el número complejo queda como:

$Z = 0 + bi$ o simplemente $Z = bi$, llamándose a bi número *imaginario puro*.

Si $b = 0$ entonces el número complejo resulta $Z = a + 0i$ o simplemente $Z = a$, siendo a un *número real*.

A continuación se presentan algunos ejemplos de números complejos en forma binómica, asociados a los números reales y a la unidad imaginaria.

$Z = 3 + 5i$; donde $a = 3$ y $b = 5$
$Z = -1 - 2i$; donde $a = -1$ y $b = -2$
$Z = -2 + i$; donde $a = -2$ y $b = 1$
$Z = 5 - 2i$; donde $a = 5$ y $b = -2$
$Z = -3i$; donde $a = 0$ y $b = -3$
$Z = 1$; donde $a = 1$ y $b = 0$

2.1.1. EL CONJUGADO DEL NÚMERO COMPLEJO

Dado el número complejo $Z = a + bi$, al número complejo $\overline{Z} = a - bi$, se le llama el *conjugado* de Z. Por ejemplo, sea $Z = 3 + 4i$, su conjugado es: $\overline{Z} = 3 - 4i$.

Si $Z = -2 - i$, su conjugado es: $\overline{Z} = -2 + i$.

Si $Z = -1$, su conjugado es: $\overline{Z} = -1$,

Si $Z = 2i$, su conjugado es: $\overline{Z} = -2i$,

Si $Z = -2 + i$, su conjugado es: $\overline{Z} = -2 - i$.

2.2.2. POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA "i"

Si $i = \sqrt{-1}$, pero $\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$, entonces: $i = \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}}$, donde $i = i^1$ por lo que: $i^1 = i = (-1)^{\frac{1}{2}}$

Ahora bien, elevando al cuadrado ambos miembros de la expresión anterior,

$i^{(1)(2)} = (-1)^{(\frac{1}{2})(2)}$ se obtiene lo siguiente: $i^2 = -1$

Si se desean obtener las potencias enteras sucesivas de "i", donde $i^1 = i$, esto se realiza de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
i^2 &= -1, \\
i^3 &= (i^2)(i) = (-1)(i) = -i \\
i^4 &= (i^3)(i) = (-i)(i) = -i^2 = -(-1) = 1 \\
i^5 &= (i^4)(1) = (1)(i) = i
\end{aligned}
$$

En adelante se repiten de cuatro en cuatro en forma periódica o sucesiva.

$$
\begin{aligned}
i^6 &= -1 \\
i^7 &= -i \\
i^8 &= 1 \\
i^9 &= i
\end{aligned}
$$

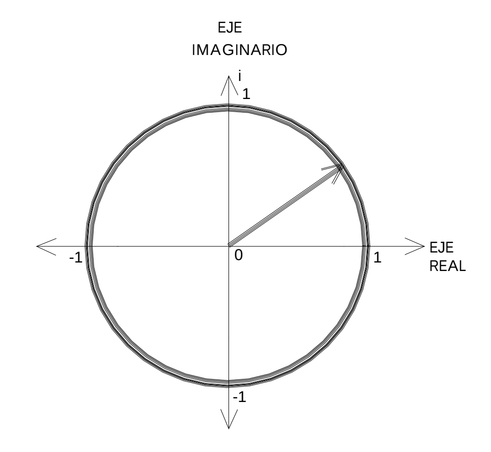
$$
\begin{aligned}
i^{10} &= -1 \\
i^{11} &= -i \\
i^{12} &= 1 \\
i^{13} &= i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i^{14} &= -1 \\
i^{15} &= -i \\
i^{16} &= 1 \\
i^{17} &= i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i^{18} &= -1 \\
i^{19} &= -i \\
i^{20} &= 1 \\
i^{21} &= i
\end{aligned}
$$

.
.
.
.

A continuación, se representa en el plano de los *números complejo* los valores de las primeras cuatro potencias de la unidad imaginaria "i", cuya figura geométrica es un círculo con radio igual a la unidad (1). Donde en la horizontal está el eje de los números reales ($\mathbb{R}$), y en la vertical el eje de los números imaginarios (*i*).



Recordando que:

$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = i^{18} = \cdots = -1$
$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = i^{19} = \cdots = -i$
$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = i^{20} = \cdots = 1$
$i^5 = i^9 = i^{13} = i^{17} = i^{21} = \cdots = i$

Cuando se quiera simplificar la unidad imaginaria elevada a una potencia entera positiva cualesquiera, i^n, siendo "n" un número real que produce un residuo r al dividirlo entre 4. Para ello se deberá de utilizar la siguiente fórmula: $i^n = i^r$.

Por ejemplo, simplificar i^{55}.

Solución:

Se divide 55 entre 4, siendo su residuo igual a 3:

```
  _13__
4 | 55
    15
     3
```

Por lo que $i^{55} = i^3 = -i$

NOTA:

Cuando "n" es divisible entre 4, el residuo r es igual a 0 y por lo tanto $i^0 = 1$

2.2. OPERACIONES ARITMÉTICAS

En esta parte se indican las cuatro operaciones básicas que se pueden realizar con dichos números en forma binómica, cuyos resultados correspondientes siempre serán en forma binómica.

2.2.1. SUMA o ADICIÓN

Sean los siguientes números complejos: $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, estos números se pueden sumar como si fueran binomios, agrupando términos semejantes resulta lo siguiente:

$$Z_1 + Z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Ejemplo:

Sean: $Z_1 = 8 + 4i$ y $Z_2 = 12 + 8i$, efectuar su suma.

Solución

$$Z_1 + Z_2 = (8 + 4i) + (12 + 8i) = 8 + 4i + 12 + 8i = 8 + 12 + 4i + 8i = 20 + 12i$$

Otro símil, puede ser cuando $Z_1 = -3 + 2i$ y $Z_2 = 3 - 8i$ y se desea realizar su adición.

Solución:

$$Z_1 + Z_2 = (-3 + 2i) + (3 - 8i) = -3 + 2i + 3 - 8i = -3 + 3 + 2i - 8i = 0 - 6i = -6i$$

2.2.2. RESTA o SUSTRACCIÓN

De igual manera que para la suma, la resta de los números complejos en forma binómica se realiza considerándolos como binomios. Si, $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, realizar $Z_1 - Z_2$:

$$Z_1 - Z_2 = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di = a - c + bi - di =$$
$$= (a - c) + (bi - di) = (a - c) + (b - d)i$$

Ejemplo:

Sea $Z_1 = 2 + 3i$ y $Z_2 = 5 + 2i$, efectuar $Z_1 - Z_2$.

Solución:

$$Z_1 - Z_2 = (2 + 3i) - (5 + 2i) = 2 + 3i - 5 - 2i = 2 - 5 + 3i - 2i = -3 + i$$

Ejemplo:

Si: $Z_1 = 3 + 3i$ y $Z_2 = 5 + 3i$, efectuar $Z_1 - Z_2$.

Solución:
$Z_1 - Z_2 = (3 + 3i) - (5 + 3i) = 3 + 3i - 5 - 3i = 3 - 5 + 3i - 3i = -2 - 0 = -2$

2.2.3. MULTIPLICACIÓN o PRODUCTO

La multiplicación de números complejos en forma binómica se puede realizar también como si fueran binomios. Para ello, si $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, efectuar $Z_1 Z_2$, donde:

$Z_1 Z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdii =$

$= ac + adi + bci + bdi^2$, pero $i^2 = -1$, resulta que

$= ac + adi + bci + bd(-1) = ac + adi + bci + (-bd) =$

$= ac + adi + bci - bd = ac - bd + adi + bci =$

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ejemplo:

Efectuar el producto de Z_1 y Z_2, si: $Z_1 = -2 + 3i$ y $Z_2 = 4 + i$

Solución:

$Z_1 Z_2 = (-2 + 3i)(4 + i) = (-2)(4) + (-2)(i) + (3i)(4) + (3i)(i) =$
$= -8 - 2i + 12i + 3i^2 = -8 - 2i + 12i + 3(-1) =$
$= -8 - 3 - 2i + 12i = -11 + 10i$

Ejemplo:

$Z_1 = 1 + i$ y $Z_2 = 1 - i$, realizar $Z_1 Z_2$.

Solución:

$Z_1 Z_2 = (1 + i)(1 - i) = (1)(1) + (1)(-i) + (i)(1) + (i)(-i) =$
$= 1 - i + i + (-i^2) = -1 - i + i + (-(-1)) =$
$= -1 - i + i + 1 = -1 + 1 - i + i = 0 + 0i = 0$

2.2.3.4. DIVISIÓN o COCIENTE

Para poder dividir números complejos en forma binómica, por ejemplo:

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$ siendo $a + bi$ el *numerador* y $c + di$ el *denominador*. Para ello es necesario racionalizar el denominador multiplicando el numerador y el denominador de la fracción por el complejo conjugado del denominador, que es $\overline{Z}_2 = c - di$

Por lo que:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di} \bullet \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-cdi+cdi-d^2i^2} =$$

$$= \frac{ac+bd-adi+bci}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

A continuación se desea obtener el cociente o división $\frac{Z_1}{Z_2}$ de los siguientes números complejos en forma binómica, donde: $Z_1 = 1 + 8i$ y $Z_2 = 2 + i$

Solución:

$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{1+8i}{2+i}$ pero recordando que $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2}$

Donde $\overline{Z}_2 = 2 - i$; entonces:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{\overline{Z}_2}{\overline{Z}_2} = \frac{1+8i}{2+i} \frac{2-i}{2-i} =$$

$$= \frac{1(2)+1(-i)+(8i)(2)+(8i)(-i)}{2(2)+2(-i)+i(2)+i(-i)} = \frac{2-i+16i-8i^2}{4-2i+2i-i^2} =$$

$$= \frac{2+8-i+16i}{4+1} = \frac{10+15i}{5} = \frac{10}{5} + \frac{15i}{5} = 2 + 3i$$

2.2.5. POTENCIA ENTERA "n" POSITIVA

Sea $Z = a + bi$, y se desea elevar a la potencia "3" este número complejo en forma binómica.

Solución:

El número complejo original en forma binómica $Z = a + bi$ para que pueda ser elevado a la tercera potencia, es necesario primero elevar ambos extremos al cubo.

$Z^3 = (a + bi)^3$.

O también se considera como un binomio elevado a la potencia entera 3, por lo que:

$$Z^3 = (a + bi)^3 = (a + bi)(a + bi)(a + bi) =$$

$$= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3$$

Pero $i^2 = -1$ e $i^3 = -i$, entonces

$$Z^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i$$

Siendo este resultado en forma *binómica*.

Ejemplo:

Si $Z = -2 + 2i$, obtener su segunda, tercera y cuarta potencia entera positiva.

Solución:

$Z = -2 + 2i$ está elevado a la primera potencia

a).- Su segunda potencia es:

$$Z^2 = (-2 + 2i)^2 = (-2 + 2i)(-2 + 2i) = 4 - 8i + 4i^2 =$$
$$= 4 - 4 - 8i = -8i$$

b).- La tercera potencia es:

$$Z^3 = (-2 + 2i)^3 = (-2 + 2i)(-2 + 2i)(-2 + 2i) = 16 + 16i$$

c).- Y su cuarta potencia es:

$$Z^4 = (-2 + 2i)^4 = (-2 + 2i)(-2 + 2i)(-2 + 2i)(-2 + 2i) = -64$$

2.2.5. EJERCICIOS

1. Sean los siguientes números complejos en forma binómica, establecer el complejo conjugado correspondiente: $5 + 7i$, $-5 - 7i$, $4i$, 3.

Solución:

$Z = 5 + 7i$; $\overline{Z} = 5 - 7i$

$Z = -5 - 7i$; $\overline{Z} = -5 + 7i$

$Z = 4i$; $\overline{Z} = -4i$

$Z = 3$; $\overline{Z} = 3$

2. Encontrar el producto de $3 + i$ por su complejo conjugado.

   Solución:

   Sea $Z = 3 + i$ su conjugado complejo es $\overline{Z} = 3 - i$. Por lo tanto:

   $Z\,\overline{Z} = (3 + i)(3 - i) = 9 - 3i + 3i - i^2 = 9 - i^2 = 9 - (-1) = 10$

3. Simplificar i^{29}.

   Solución:

   Al dividir 29 entre 4 se obtiene el cociente 7 y el residuo 1. Por consiguiente:

   $i^{29} = i^1 = i$

4. Simplificar la siguiente expresión:

   $$\sqrt{\frac{-100}{49}}$$

   Solución:

   $$\sqrt{\frac{-100}{49}} = \sqrt{\frac{100(-1)}{49}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{49}}\sqrt{-1} = \frac{10}{7}i$$

5. Sea $Z_1 = -5i$ y $Z_2 = 4 - 8i$, efectuar: $Z_1 + Z_2$, $Z_1 Z_2$, $Z_1 - Z_2$ y $\dfrac{Z_1}{Z_2}$

   Solución:

   $Z = Z_1 + Z_2 = (-5i) + (4 - 8i) = -5i + 4 - 8i = 4 - 5i - 8i = 4 - 13i$

   $Z = Z_1 Z_2 = (-5i)(4 - 8i) = (-5i)(4) + (-5i)(-8i) = 20i + 40i^2 = -40 + 20i$

$Z = Z_1 - Z_2 = (-5i) - (4 - 8i) = -5i - 4 + 8i = -4 - 5i + 8i = \; = -4 + 3i$

$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\frac{\overline{Z_2}}{\overline{Z_2}} = \frac{-5i}{4-8i}\frac{4+8i}{4+8i} = \frac{-20-40i^2}{16-64i^2} = \frac{-20+40}{16+64} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$$

6. Efectuar la siguiente expresión: $Z = i(3-2i)^2$.

Solución:

$Z = i(3-2i)^2 = i(9 - 12i + 4i^2) = i(5 - 12i) = 5i - 12i^2 = 12 + 5i$

7. Resolver el producto de: $(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4})$

Solución:

Sea:

$(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4}) = (5 - \sqrt{9}\, i)(-1 + \sqrt{4}\, i) = (5 - 3i)(-1 + 2i) = 1 + 13i$

8. Resolver la ecuación $5Z^2 + 2Z + 1 = 0$

Solución:

Sea $a = 5$, $b = 2$ y $c = 1$

Cuya solución es por medio de la siguiente fórmula:

$$Z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(5)(1)}}{2(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} =$$

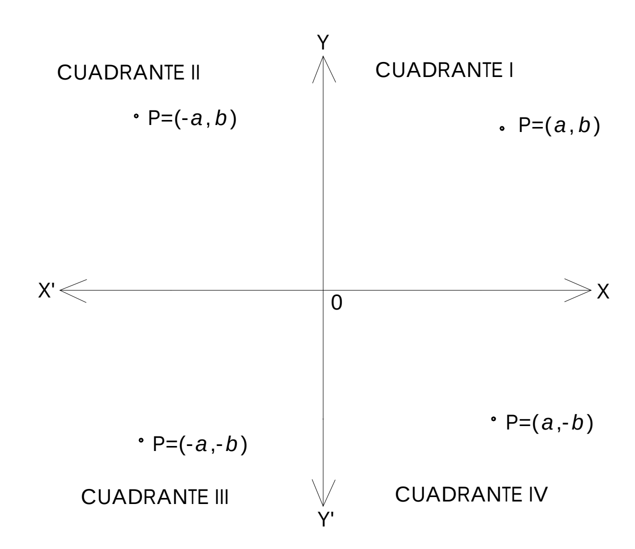
$$= \frac{-2 \pm 4i}{10} = \frac{-1 \pm 2i}{5} = -\frac{1}{5} \pm \frac{2i}{5}$$

Siendo la primera raíz: $Z_1 = -\frac{1}{5} + \frac{2i}{5}$ que es un número complejo en forma binómica, y la segunda raíz: $\overline{Z}_2 = -\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ que es el conjugado complejo de la primera raíz. Donde $a = -\frac{1}{5}$ es la parte real y $bi = \frac{2i}{5}$ es la parte imaginaria.

2.3. FORMA POLAR o TRIGONOMÉTRICA

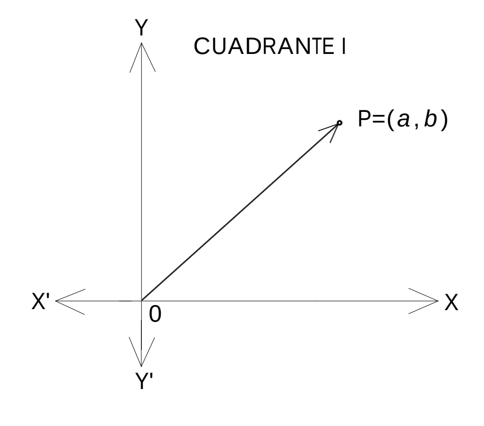
Existe una gran ventaja para el uso de los números complejos en forma polar, por su sencillez con que pueden efectuarse algunas operaciones, tal como la multiplicación y la división de módulos y sumar o restar argumentos.

Cualquier número complejo dado en forma binómica $Z = a + bi$ puede quedar representado en el plano cartesiano por medio de un punto P de coordenadas (a, b), recordando que P = (x, y); siendo a la primera componente localizada en el eje de las abscisas (X) y b la segunda componente localiza en el eje de las ordenas (Y) como se indica a continuación.

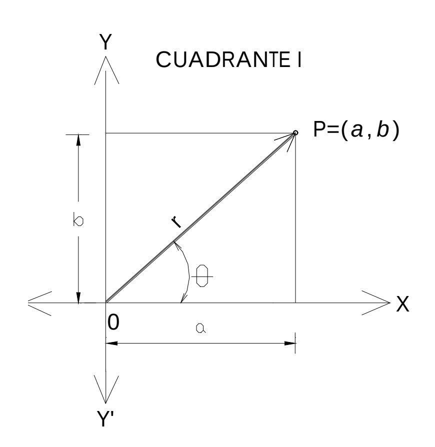


Con esto, se dice que el punto P representa al número complejo (a, b) o $a + bi$. Así, se puede decir que cada punto del plano representa a un número complejo en forma binómica, y que cada número complejo en forma binómica representa un punto en el plano cartesiano o plano normal.

Además, el punto P es susceptible de representarse también en coordenadas polares, lo cual resulta sumamente útil en ciertos tipos de problemas de ingeniería. Para ello es necesario establecer un segmento de recta que una desde el *origen* del sistema cartesiano al punto P de coordenadas (a, b), como se indica a continuación.

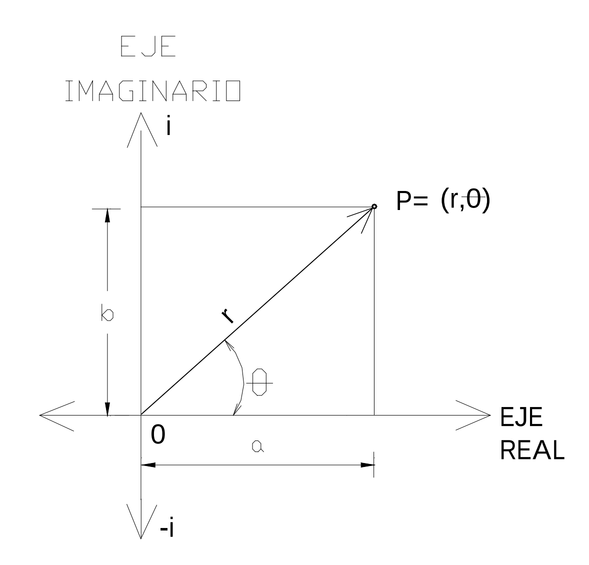


Seguidamente se proyectan las dos componentes en forma perpendicular a los ejes cartesianos de la siguiente manera:



Observándose que aparecen nuevos parámetros: r y θ. Donde r es la magnitud del segmento de recta $\overline{OP}$ y θ es el ángulo agudo dado en grados que es obtenido por las componentes a y b.

Por lo que el punto P que representa al número complejo en forma binómica $Z_1 = a + bi$, también se puede representar en otro plano conocido como "*Diagrama de Argand*" o "*Plano Complejo*", como se muestra en la siguiente figura .



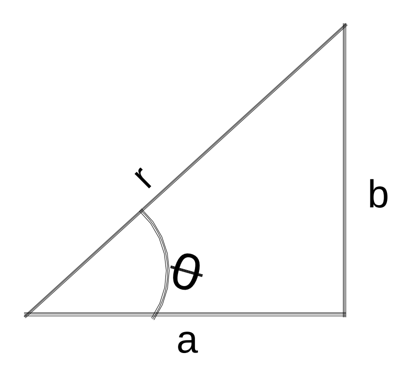
En éste plano (plano de Argand) se observa que al eje de las abscisas se le denomina eje real, al eje de las ordenadas es el eje imaginario y el punto P llamado polar cuyas coordenadas son (r, θ).

2.3.1. FORMA GENERAL

Haciendo uso de las coordenadas (a, b) es posible obtener la forma polar de un número complejo de forma binómica. De acuerdo a las primeras dos funciones trigonométricas:

$$\text{Sen } \theta = \frac{b}{r} \quad \text{y} \quad \text{Cos } \theta = \frac{a}{r}$$

Donde: a es el cateto adyacente, b el cateto opuesto y r la hipotenusa, como se indica en la siguiente figura.



Que al despejar a y b resultan las siguientes expresiones:

$a = r \text{ Cos } \theta$ y $b = r \text{ Sen } \theta$ las que al ser sustituidos en $Z = a + bi$ resulta lo siguiente:

$Z = r \text{ Cos } \theta + r \text{ Sen } \theta\, i = r\,(\text{Cos } \theta + \text{Sen } \theta\, i)$ que es la llamada *forma trigonométrica de un número complejo*, donde r se le conoce como *módulo* y a θ como el *argumento principal*, dado en grados, tal que: $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$

Es conveniente expresar al número complejo en forma polar mediante una expresión compacta o sintetizada, la cual remplaza al término $(\text{Cos } \theta + \text{Sen } \theta\, i)$ por $Cis\ \theta$. Con lo que:

$Z = r\,(\text{Cos } \theta + \text{Sen } \theta\, i) = r\ Cis\ \theta$ que es la forma más usual de representar a un número complejo en forma polar.

Ejemplo:

Sea el siguiente número complejo en forma trigonométrica:

$Z = 5 \text{ Cos} 45^0 + 5 \text{ Sen } 45^0 i$, pasarlo a la forma polar.

Solución:

Si $Z = 5 \text{ Cos } 45^0 + 5 \text{ Sen } 45^0 i = 5 (\text{Cos } 45^0 + \text{Sen } 45^0 i)$

Pero $\text{Cos } 45^0 + \text{Sen } 45^0 i = Cis\ 45^0$

Entonces $Z = 5 \text{ Cos } 45^0 + 5 \text{ Sen } 45^0 i = 5 (\text{Cos } 45^0 + \text{Sen } 45^0 i) = 5\ Cis\ 45^0$

Por lo que: $Z = 5 \text{ Cos } 45^0 + 5 \text{ Sen } 45^0 i = 5\ Cis\ 45^0$

Siendo $Z = 5\ Cis\ 45^0$ el resultado buscado.

2.3.2. FORMA BINÓMICA a FORMA POLAR

Para efectuar el proceso de convertir un número complejo en forma binómica a un número complejo en forma polar, es necesario emplear la tercera función trigonométrica de un ángulo agudo, que es: $\text{Tan } \theta = \frac{b}{a}$

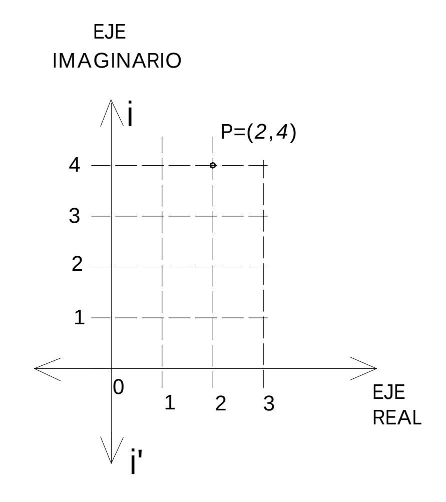
Donde $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{b}{a})$ y por el Teorema de Pitágoras $r = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$

Ejemplo:

Sea el siguiente número complejo en forma binómica $Z = 2 + 4i$, obtener su forma polar.

Solución:

La representación de $Z = 2 + 4i$ en el plano complejo se muestra a continuación



La forma general de un número complejo en forma polar es: $Z = r\ Cis\ \theta$. Donde los parámetros son el módulo r y el argumento θ dado en grados. Para ello se emplean las fórmulas siguientes:

$$\text{Tan}\ \theta = \frac{b}{a} \quad \text{------- (1)}$$

y $$r = \sqrt{(a)^2 + (b)^2} \quad \text{------- (2)}$$

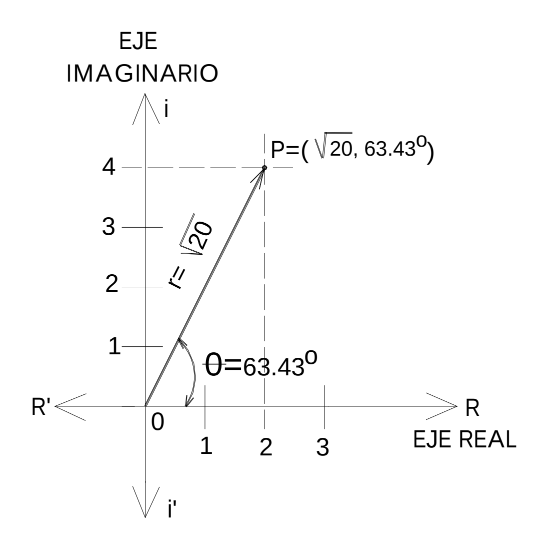
Recordando que $Z = 2 + 4i$, donde $a = 2$ y $b = 4$, sustituyendo los valores de a y b en las ecuaciones (1) y (2)

$\text{Tan}\ \theta = \frac{4}{2} = 2$ que al despejar θ, resulta que

$$\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) = \text{Tan}^{-1}(2) = 63.43^{o} \text{ y } r = \sqrt{(2)^2 + (4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4.47$$

Por lo tanto $Z = 2 + 4i$ en forma binómica es equivalente a $Z = \sqrt{20}\ Cis\ 63.43^{o}$ en forma polar.

El cual queda representado gráficamente en el plano de Argand como se indica a continuación.



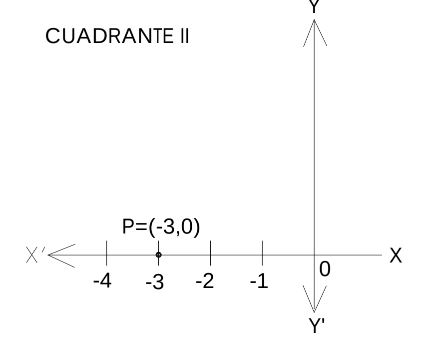
Donde el punto (2, 4) en forma binómica es equivalente a $P = \left(\sqrt{20}, 63.43^{o}\right)$ en coordenadas polares.

Ejemplo:

Dado el número complejo en forma binómica $Z = -3$, obtener su forma polar, representándolo en el plano de Argand.

Solución:

Si $Z = -3$ (forma binómica), entonces $a = -3$ y $b = 0$, cuya localización en el plano cartesiano es por medio del punto $(-3, 0)$, como se indica a continuación:



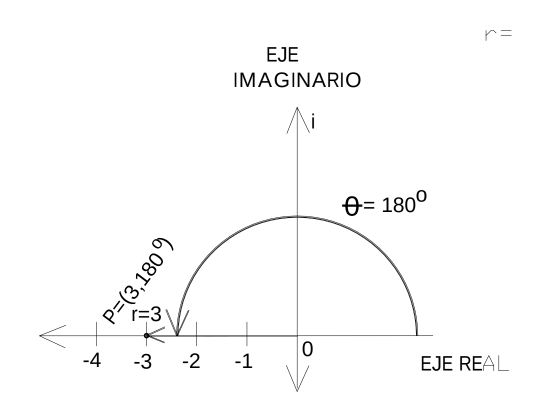
En el plano de Argand se representa la figura, donde:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (0)^2} = \sqrt{9 + 0} = \sqrt{9} = 3$$

y $\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{0}{-3}\right) = 180^o$

Siendo r y θ los parámetros del punto P = (r, θ) de la forma polar, por lo que:

P = $(3, 180^o)$, y $Z = 3\ Cis\ 180^o$ en forma polar.

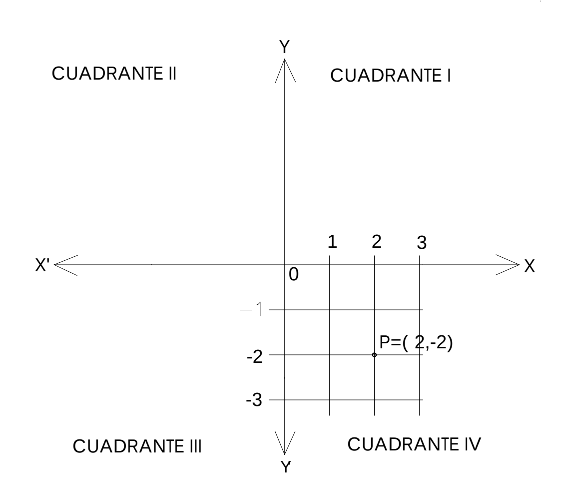


Ejemplo:

Dado el siguiente número complejo en forma binómica $Z = -2 - 2i$, obtener su forma polar y representarlo en el plano de Argand.

Solución:

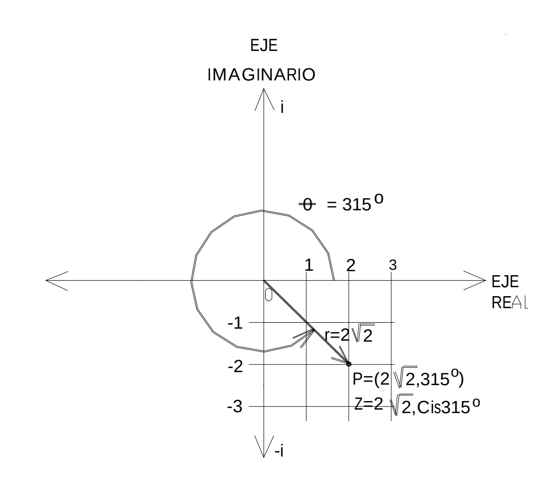
Si $Z = 2 - 2i$ en forma binómica, donde: $a = 2$ y $b = -2$, lo que representa al punto P = $(2, -2)$, cuya localización esta en el cuarto cuadrante del plano cartesiano.



Ahora r y θ son los nuevos parámetros para la forma polar o trigonométrica en el plano de Argand, donde:

$$r = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} == \sqrt{8} = \sqrt{4(2)} = = \sqrt{4}\sqrt{2} = =2\sqrt{2}$$

y $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{-2}{2}) = 315^o$ cuya forma general en forma polar es: $Z = 2\sqrt{2}\, Cis315^o$ de coordenadas polares P = $(2\sqrt{2}, 315^o)$

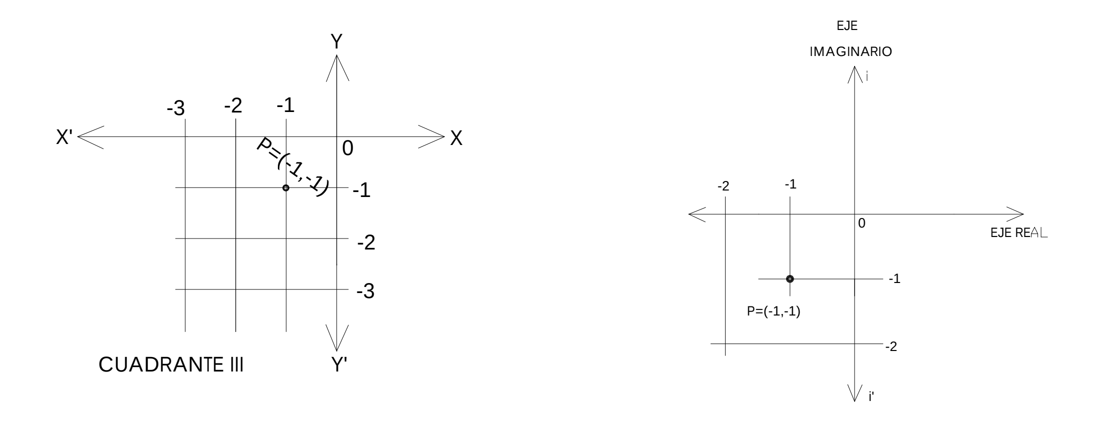


Ejemplo:

Sea el siguiente número complejo en forma binómica Z $= -1 - i$, obtener su forma polar.

Solución:

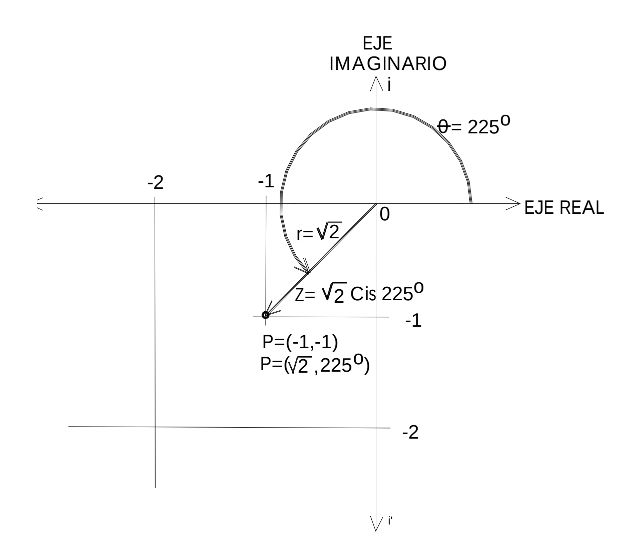
Si $Z = -1 - i$, donde $a = -1$ y $b = -1$, el punto cartesiano será: P = $(-1, -1)$, el cual se localiza en el tercer cuadrante, como se indica en la figura siguiente, así como en el sistema complejo.



Que para pasarlo a la forma polar es necesario obtener los siguientes valores:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ y } \theta = \mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = 225^o$$

Cuya forma polar es la siguiente: $Z = \sqrt{2}\, Cis\ 225^o$. El cual se representa a continuación en el plano de Argand o plano complejo.



2.3.3 OPERACIONES ALGEBRAICAS

A continuación se presentan las diferentes operaciones que se pueden realizar con los números complejos en forma polar.

2.3.3.1. MULTIPLICACIÓN o PRODUCTO

Sean dos números complejos en forma polar o trigonométrica cualesquiera $Z_1 = r_1 \, Cis \, \theta_1$ y $Z_2 = r_2 \, Cis \, \theta$. Efectuar $Z_1 \, Z_2$:

$$Z_1 \; Z_2 = (r_1 \, Cis \, \theta_1)\,(r_2 \, Cis \, \theta_2) = (r_1(\text{Cos } \theta_1 + \text{Sen } \theta_1 \, i))\,(r_2(\text{Cos } \theta_2 + \text{Sen } \theta_2 \, i)) =$$
$$= r_1 \, r_2 \,(\text{Cos } \theta_1 \, \text{Cos } \theta_2 + \text{Cos } \theta_1 \, \text{Sen } \theta_2 i + \text{Sen } \theta_1 \, \text{Cos } \theta_2 i + \text{Sen } \theta_1 \, \text{Sen } \theta \, i^2)$$

Factorizando $i^2 = -1$, se tiene

$$Z_1 \, Z_2 = r_1 r_2((\text{Cos } \theta_1 \, \text{Cos } \theta_2 - \text{Sen } \theta_1 \, \text{Sen } \theta_2) + (\text{Sen } \theta_1 \, \text{Cos } \theta_2 + \text{Cos } \theta_1 \, \text{Sen } \theta_2)\, i)$$

por trigonometría:

$$\text{Cos } \theta_1 \, \text{Cos } \theta_2 - \text{Sen } \theta_1 \, \text{Sen } \theta_2 = \text{Cos } (\theta_1 + \theta_2)$$

y

$\text{Sen } \theta_1 \, \text{Cos } \theta_2 + \text{Cos } \theta_1 \, \text{Sen } \theta_2 = \text{Sen } (\theta_1 + \theta_2)$ por lo que:

$Z_1 Z_2 = r_1 \, r_2 \,(\text{Cos } (\theta_1 + \theta_2) + \text{Sen } (\theta_1 + \theta_2)\, i)$ lo cual se puede simplificar utilizando el concepto de $Z = r\,(\text{Cos } \theta + \text{Sen } \theta \, i) = r \, Cis \, \theta.$ Entonces:

$Z_1 Z_2 = r_1 r_2 \, Cis(\theta_1 + \theta_2)$ que es la fórmula para multiplicar dos números complejos en forma *polar*.

Ahora bien, si se tienen "*n*" números complejos en forma polar, la fórmula para poder multiplicar a todos ellos es la siguiente:

$$Z_1 \, Z_2 \bullet\bullet\bullet \; Z_n = r_1 \, r_2 \bullet\bullet\bullet \, \text{Cis } (\theta_1 + \theta_2 \bullet\bullet\bullet + \theta_n)$$

Ejemplo:

Sean $Z_1 = 5 \, Cis \; 35^o$, $Z_2 = Cis \; 195^o$, $Z_3 = 2 \, Cis \; 320^o$ y $Z_4 = 3 \, Cis \; 245^o$, efectuar el producto de: $Z_1 \, Z_2 \, Z_3 \, Z_4$.

Solución:

Si $Z = Z_1 \, Z_2 \, Z_3 \, Z_4$ al sustituir los valores resulta que:

$$Z = (5 \, Cis \; 35^o)(Cis \; 195^o)(2 \, Cis \; 320^o)(3 \, Cis \; 245^o)$$

Que al aplicar la fórmula correspondiente, queda de la siguiente manera:

$Z =$ (5)(1)(2)(3) $Cis\ (35^o + 195^o + 320^o + 245^o) = 30\ Cis\ 620^o = 30\ Cis\ 260^o$

Siendo este el resultado

Nota: 620º es igual a una vuelta o una revolución más 260º.

2.3.3.2. DIVISIÓN o COCIENTE

Una ventaja del manejo de los números complejos en su forma polar, es la sencillez con que se pueden efectuar algunas operaciones aritméticas como es la multiplicación y la división, todo esto se reduce a multiplicar módulos y sumar argumentos como se acaba de ver en el inciso anterior; y, a dividir módulos y restar argumentos en la obtención de cocientes.

Para ello, sean $Z_1 = r_1\ Cis\ \theta_1$ y $Z_2 = r_2\ Cis\ \theta_2$, efectuar $\frac{Z_1}{Z_2}$. Donde $r_1\ Cis\ \theta_1$ es el numerador y $r_2\ Cis\ \theta_2$ es el denominador.

Si $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1\ \text{Cis}\ \theta_1}{r_2\ \text{Cis}\theta_2}$ esta operación no se puede descomponer a consecuencia del denominador que esta en forma polar.

Para ello es necesario recurrir al inverso multiplicativo del denominador Z_2.

$$Z_2^{-1} = \frac{1}{r_2\ \text{Cis}\theta_2} = \frac{1}{r_2} Cis\ (-\theta_2)$$

Por lo que

$$\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1 \frac{1}{Z_2} = Z_1\ Z_2^{-1} = r_1\ Cis\ \theta_1\ \frac{1}{r_2\ \text{Cis}\theta_2} =$$

$$= r_1\ Cis\ \theta_1\ \frac{1}{r_2} Cis\ (-\theta_2) = \frac{r_1}{r_2}\ Cis\ (\theta_1 - \theta_2)$$

Esto indica que: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1\ \text{Cis}\ \theta_1}{r_2\ \text{Cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\ Cis\ (\theta_1 - \theta_2)$ es la fórmula para dividir dos números complejos en forma polar.

Ejemplo:

Sean $Z_1 = 5\ Cis\ 125^o$ y $Z_2 = 10\ Cis\ 325^o$. Efectuar $\frac{Z_1}{Z_2}$.

Solución:

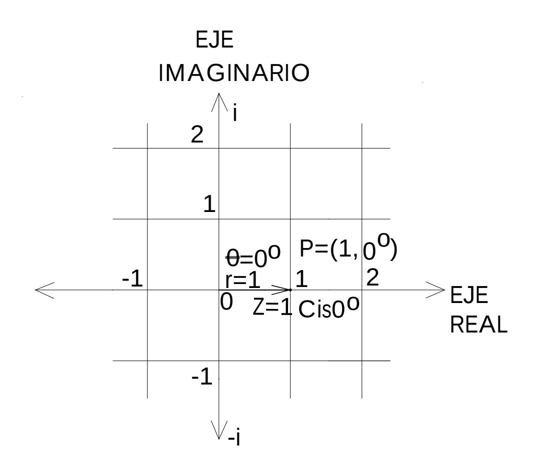
$$Z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{5\,\text{Cis}125^o}{10\,\text{Cis}\,325^o} = \frac{5}{10}\,Cis\,(125^o - 325^o) = \frac{1}{5}\,Cis\,(-200^o) = \frac{1}{5}\,Cis\,160^o$$

2.3.3.3. EL INVERSO MULTIPLICATIVO

El elemento idéntico para la multiplicación de números complejos en forma binómica es $Z_u = 1 + 0i$, expresado en forma polar es $Z_u = 1\,Cis\,0^o$, ya que:

$r = \sqrt{(1)^2 + (0)^2} = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$ y $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{0}{1}) = 0^o$, por lo que $Z_u = 1\,Cis\,0^o$.

El cual es representado gráficamente en el siguiente plano de Argand.



Ahora bien, si se tiene el número complejo en forma polar $Z = r\,Cis\,\theta$, su inverso multiplicativo es un número complejo de la forma: $Z^{-1} = \rho\,Cis\,Ø$, tal que:

$Z\,Z^{-1} = 1\,Cis\,0^o$ que al ser sustituidos los valores conocidos, resulta:

$(r\,\text{Cis}\,\theta)(\rho\,Cis\,Ø) = 1\,Cis\,0^o$

Efectuando la multiplicación del extremo izquierdo, se tiene lo siguiente:

$r\,\rho\,Cis\,(\theta + Ø) = 1\,Cis\,0^o$, que por igualdad de números complejos en forma polar, resulta lo siguiente:

$r\,\rho = 1$ y $\theta + Ø = 0^o + k\,(360^o)$

Despejando ρ y Ø, y considerando sólo el argumento principal, se tiene:

$\rho = \frac{1}{r}$ y $\text{Ø} = -\theta$,

Entonces el inverso multiplicativo de $Z = r\ Cis\ \theta$ es: $Z^{-1} = \frac{1}{r}\ Cis\ (-\theta)$

Por otra parte, como $Z\ Z^{-1} = 1\ Cis\ 0^o$, al despejar Z se observa lo siguiente:

$Z^{-1} = \frac{1\,\text{Cis}0^o}{Z}$. Si 1 Cis $0^o = 1$ y $Z = r\ Cis\ \theta$, entonces:

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{r\,\text{Cis}\,\theta} = \frac{1}{r}\ Cis\ (-\theta)$$

Siendo otra manera para obtener el inverso multiplicativo de $Z = r\ Cis\ \theta$.

2.3.3.4. POTENCIA ENÉSIMA DE Z

Sea el siguiente número complejo en forma polar $Z = r\ Cis\ \theta$, si se elevan ambos extremos a la potencia entera positiva "n", como se indica a continuación.

$$Z^n = (r\ Cis\ \theta)^n = (r\ Cis\ \theta)(r\ Cis\ \theta)(r\ Cis\ \theta) \bullet \bullet \bullet \bullet (r\ Cis\ \theta)$$

Donde: $(r\ Cis\ \theta)(r\ Cis\ \theta)(r\ Cis\ \theta) \bullet \bullet \bullet \bullet (r\ Cis\ \theta)$ es igual a "n" factores.

Aplicando la fórmula para la multiplicación, resulta que:

$$Z^n = (r\ Cis\ \theta)^n = r\ r\ r \bullet \bullet \bullet \bullet r\ Cis\ (\theta + \theta + \theta + \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet + \theta)$$

Siendo: $r\ r\ r \bullet \bullet \bullet \bullet r$, n factores, y $(\theta + \theta + \theta + \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet + \theta)$, n sumandos.

Por tanto

$Z^n = (r\ Cis\ \theta)^n = r^n\ Cis\ (n\ \theta)$ es la fórmula de De Moivre.

Ejemplo:

Sea $Z = \sqrt{5}\ Cis\ 90^o$, obtener su cuarta potencia.

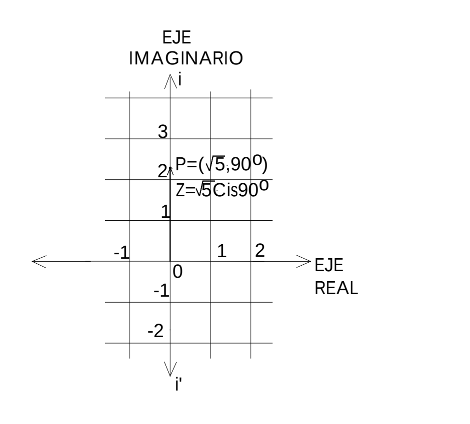
Solución:

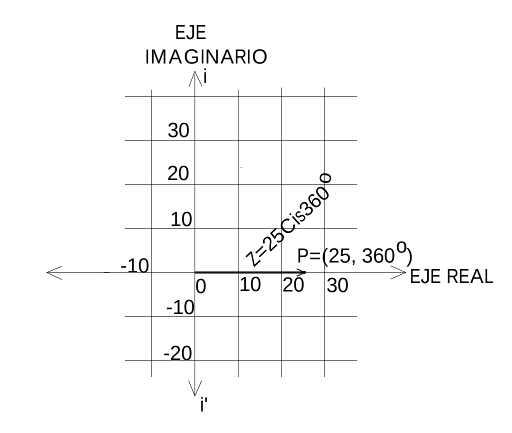
Si $n = 4$ y $Z = \sqrt{5}\ Cis\ 90^o$, y aplicando la fórmula de De Moivre:

$Z^n = (r \, Cis \, \theta)^n = r^n \, Cis \, (n \, \theta)$, resulta lo siguiente:

$Z^4 = (\sqrt{5})^4 \, Cis \, (90^o)^4 = (5)^{(½)(4)} \, Cis \, (4(90^o)) = 25 \, Cis \, 360^o$

Lo cual se puede representar gráficamente por medio del plano de Argand.





2.3.3.5. RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Para obtener una expresión que permita calcular las raíces de cualquier número complejo en forma polar, es necesario considerar las siguientes expresiones matemáticas:

$Z = r \, Cis \, \theta$ que es cualquier número complejo en forma polar

y

$\omega = \rho \, Cis \, Ø$ que es la raíz enésima de $Z = r \, Cis \, \theta$, considerando que:

$\omega^n = Z$, donde "n" es un número entero no positivo.

Al sustituir los valores de ω y Z se observa lo siguiente:

$(\rho \, Cis \, Ø)^n = r \, Cis \, \theta$, aplicando la fórmula de De Moivre se tiene:

$\rho^n \, Cis \, nØ = r \, Cis \, \theta$, que por igualdad de números complejos en forma polar, resulta:

$\rho^n = r$ y $nØ = \theta + k \, (360^o)$ para $k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$

Despejando ρ y $Ø$ se tiene: $\rho = (r)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}$ y $Ø = \dfrac{\theta + k(360^0)}{n}$ que al ser sustituidos en la expresión $\omega = \rho \, Cis \, Ø$ se obtiene lo siguiente:

$$\omega = \sqrt[n]{r}\ \mathbf{Cis}\ \frac{\theta + k(360^0)}{n},\ \text{con}\quad k = 0, 1, 2, \bullet\bullet\bullet\bullet, (n-1)$$

Siendo esta la fórmula para obtener "n" raíces reales positivas en forma polar. Donde $\sqrt[n]{Z}$ es la representación de un número real no negativo cuya enésima potencia es igual a r. A la vez que $\omega^n = Z$, de donde $\omega = \sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{rCis\theta}$.

Ejemplo:

Hallar las cuatro raíces del número complejo en forma polar $Z = 4\ Cis\ 60º$. Representándolas en el plano de Argand.

Solución:

Para ello se utiliza la fórmula:

$$\omega = \sqrt[n]{r}\ Cis\ \frac{\theta + k(360^0)}{n},\ \text{con}\quad k = 0, 1, 2, \bullet\bullet\bullet\bullet, (n-1)$$

Donde $r = 4$; $\theta = 60º$; y, $n = 4$, que serán sustituidos en la expresión matemática.

Para $k = 0$

$$\omega_0 = \sqrt[4]{4}\,Cis\ \frac{60 + (0)(360^0)}{4} = \sqrt{2}\ Cis\ \frac{60^0 + 0^0}{4} = \sqrt{2}\ Cis\ \frac{60^0}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\ Cis\ 15º$$ (es la primera raíz)

si $k = 1$

$$\omega_1 = \sqrt[4]{4}\,Cis\ \frac{60 + (1)(360^0)}{4} = \sqrt{2}\,Cis\ \frac{60^0 + 360^0}{4} = \sqrt{2}\,Cis\frac{420^0}{4} =$$

$$= \sqrt{2}\ Cis\ 105º$$ (es la segunda raíz)

si $k = 2$

$$\omega_2 = \sqrt[4]{4}\,Cis\ \frac{60 + (2)(360^0)}{4} = \sqrt{2}\,Cis\frac{60^0 + 720^0}{4} = \sqrt{2}\,Cis\frac{780^0}{4} =$$

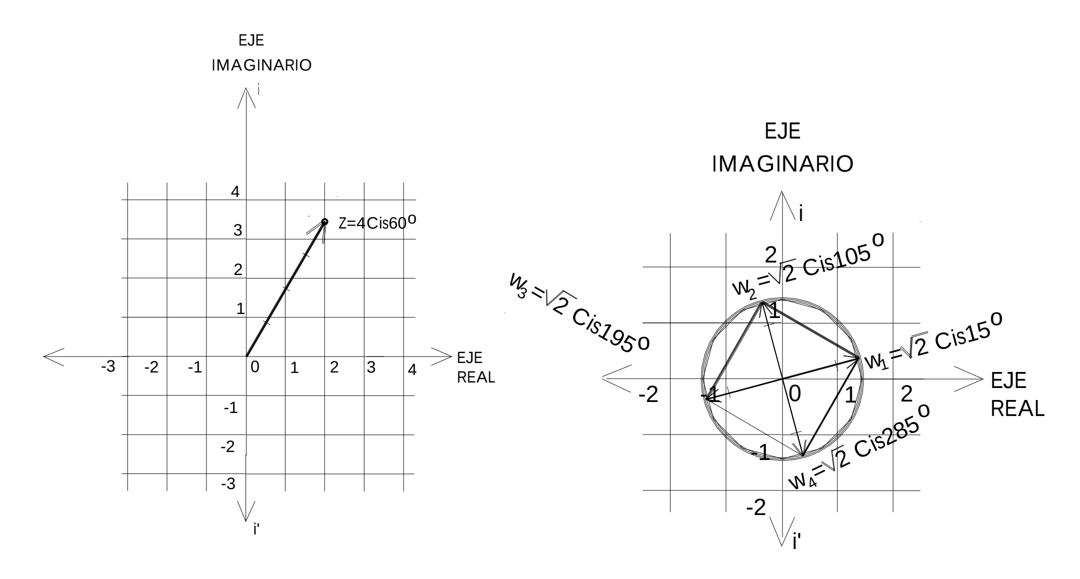
$$= \sqrt{2}\ Cis\ 195º$$ (es la tercera raíz)

Y si $k = 3$

$$\omega_3 = \sqrt[4]{4}\ Cis\frac{60+(3)(360^0)}{4} = \sqrt{2}\ Cis\frac{60^0+1080^0}{4} = \sqrt{2}\ Cis\frac{1140^0}{4} =$$

$= \sqrt{2}\ Cis\ 285^o$ (es la cuarta raíz).

Seguidamente se presentan estos números complejos en forma polar en los correspondientes planos de Argand.



2.3.4. EJERCICIOS

1. Sean los siguientes números complejos en forma binómica, convertirlos a forma polar.

   $Z_1 = 3 - 6i$; $Z_2 = -4 - i$; $Z_3 = 2 + i$; y, $Z_4 = -2 + i$

   Solución:

   La forma binómica se expresa de la siguiente manera:

   $Z = a + bi$; donde a y b son números reales. La forma trigonométrica o polar es:
   $Z = r\,(\text{Cos}\ \theta + \text{Sen}\ \theta\ i) = r\ Cis\ \theta$, donde: $r = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$ y $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{b}{a})$

   a) Por lo que para $Z_1 = 3 - 6i$; donde: $a = 3$ y $b = -6$. Entonces resulta lo siguiente:

   $$r = \sqrt{(3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \approx 6.708$$

y $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{-6}{3})$ = 296.5651º ≈ 296º 33’ 54’’

Siendo la forma polar:

$Z_1 = \sqrt{45}$ (Cos 296.57º + Sen 296.57º i) = $\sqrt{45}$ *Cis 296.57º*

b) Para $Z_2 = -4 - i$; donde $a = -4$ y $b = -1$.
Por lo que:

$r = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17} \approx 4.12$

y $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{-1}{-4})$ = 194.04º

Por lo que $Z_2 = \sqrt{17}$ (Cos 194.04º + Sen 194.04º i) = $\sqrt{17}$ *Cis 194.04º*

c) Para $Z_3 = 2 + i$, donde $a = 2$ y $b = 1$. Donde:

$r = \sqrt{(2)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \approx 2.23$ *y* $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{1}{2})$ = 26.57º

Por lo que: $Z_3 = \sqrt{5}$ (Cos 26.57º + Sen 26.57º i) = $\sqrt{5}$ *Cis* 26.57º

d) Si $Z_4 = -2 + i$, donde $a = -2$ y $b = 6$. Entonces:

$r = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \approx 6.32$

y $\theta = \text{Tan}^{-1}(\frac{6}{-2})$ = 108.43º, por lo que:

$Z_3 = 2\sqrt{10}$ (Cos 108.43º + Sen 108.43º i) = $2\sqrt{10}$ *Cis 108.43º*

2. Sean los siguientes números complejos en forma polar, representarlos en forma binómica:

Z_1 = 4 Cis *135º*, $Z_2 = 2\sqrt{5}$ Cis *260º*, Z_3 = Cis *85º*, y Z_4 = 3 *Cis 295º*.

Solución:

a) Si Z_1 = 4 *Cis 135º*, que es de la forma $Z = r$ *Cis* θ, donde $r = 4$ y θ = 135º.

La forma binómica es $Z = a + bi$, donde: $a = r \text{ Cos } \theta$ y $b = r \text{ Sen } \theta$, entonces:

$a = 4 \text{ Cos } 135^o = 4(-0.7071) = -2.8284$
y $b = 4 \text{ Sen } 135^o = 4(0.7071) = 2.8284$, por lo que

$Z_1 = -2.8284 + 2.8284i$ que es la forma binómica del número complejo y cuya forma polar es: $Z_1 = 4 \ Cis \ 135^o$.

b) Sea $Z_2 = 2\sqrt{5} \ Cis \ 260^o$, donde $r = 2\sqrt{5}$ y $\theta = 260^o$. Por lo que:

$a = 2\sqrt{5} \text{ Cos } 260^o = 2\sqrt{5}(-0.1736) = -0.7764$
y $b = 2\sqrt{5} \text{ Sen } 260^o = 2\sqrt{5}(-0.9848) = -4.4042$, por lo que:

$Z_2 = -0.7764 - 4.4042i$ forma binómica de $Z_2 = 2\sqrt{5} \ Cis \ 260^o$ forma polar.

c) Si $Z_3 = Cis \ 85^o$, donde $r = 1$ y $\theta = 85^o$, entonces:

$a = 1 \text{ Cos } 85^o = 1(0.0872) = 0.0872$
y $b = 1 \text{ Sen } 85^o = 1(0.9962) = 0.9962$

Por lo tanto: $Z_3 = 0.0872 + 0.9962i$ que es la forma binómica de $Z_3 = \text{Cis } 85^o$, en forma polar.

d) Si $Z_4 = 3 \ Cis \ 295^o$, donde $r = 3$ y $\theta = 295^o$, entonces:

$a = 3 \text{ Cos } 295^o = 3(0.4226) = 1.2678$
y $b = 3 \text{ Cos } 295^o = 3(-0.9063) = -2.7189$, por lo que

$Z_4 = 1.2678 - 2.7189i$ que es la forma binómica del número complejo de la forma polar $Z_4 = 3 \ Cis \ 295^o$.

3. Sean $Z_1 = 2 \ Cis \ 35^o$, $Z_2 = 3 \ Cis \ 20^o$, y $Z_3 = 4 \ Cis \ 135^o$, resolver: $\dfrac{Z_1 Z_2}{Z_3}$

Solución:

$$\text{Si } Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_3} = \frac{(2Cis35^o)(3Cis20^o)}{4Cis135^o} = \frac{(2)(3)Cis(35^o + 20^o)}{4Cis135^o} =$$

$$= \frac{6Cis55^o}{4Cis135^o} = \frac{6Cis(55^o - 135^o)}{4} = \frac{6Cis(-80^o)}{4} =$$

$= \dfrac{6Cis280^o}{4} = \dfrac{6}{4}Cis280^o = \dfrac{3}{2}Cis280^o$

4. Si $Z_1 = Cis\ 180^o$, $Z_2 = 3\ Cis\ 120^o$, y $Z_3 = 4\ Cis\ 1{,}250^o$, resolver: $\dfrac{Z_1 Z_2}{(Z_3)^2}$

Solución:

Si $Z_1 Z_2 = (Cis\ 180^o)(3\ Cis\ 120^o) = (1)(3)\ Cis\ (180^o + 120^o) = 3\ Cis\ 330^o$
y $Z_3 = 4\ Cis\ 1{,}250^o = 4\ Cis$ (3 revoluciones más 170º) $= 4\ Cis\ 170^o$

Entonces: $(Z_3)^2 = (4\ Cis\ 170^o)^2 = (4)^2\ Cis\ (170^o + 170^o) = 16\ Cis\ 340^o$

De donde:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{(Z_3)^2} = \frac{3Cis330^o}{16Cis340^o} = \frac{3Cis(330^o - 340^o)}{16} = \frac{3Cis(-10^o)}{16} = \frac{3Cis350^o}{16} = \frac{3}{16}Cis350^o$$

5. Sean $Z_1 = \sqrt{5}\ Cis\ \mathbf{90^o}$, $Z_2 = 3 + 3\sqrt{3}\,i$, $Z_3 = 2\ Cis\ 60^o$, y $Z_4 = -2$, resolver la siguiente expresión, elevándola a la cuarta potencia.

$$Z = \left[\frac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right]\overline{Z_1}$$

Solución:

Para resolver esta expresión es necesario ir efectuando operación por operación.

1º Realizar $Z_3 + Z_2$, donde: $Z_3 = 2\ Cis\ 60^o$ y $Z_2 = 3 + 3\sqrt{3}\,i$, por lo que Z_3 hay que pasarlo a la forma binómica.

$a = 2 \text{ Cos } 60^o = 2(0.5000) = 1$
y
$b = 2 \text{ Sen } 60^o = 2(0.8660) = 1.7321 = \sqrt{3}$

Donde $Z_3 = 1 + \sqrt{3}\,i$ la forma binómica de $Z_3 = 2\ Cis\ 60^o$.

Ahora si: $Z_3 + Z_2 = (1 + \sqrt{3}\,i) + (3 + 3\sqrt{3}\,i) = 4 + 4\sqrt{3}\,i$

2º Efectuar $\left[\dfrac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right]$ donde $Z_4 = -2$, por lo tanto

$$\left[\frac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right] = \frac{4 + 4\sqrt{3}i}{-2} = \frac{4}{-2} + \frac{4\sqrt{3}i}{-2} = -2 - 2\sqrt{3}i$$

3º Sustituir los valores conocidos en $\left[\dfrac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right]\overline{Z_1}$ donde: $Z_1 = \sqrt{5}\ Cis\ 90^o$, pero no se conoce al conjugado de Z_1 por lo que es necesario obtenerlo. Para ello hay que realizar lo siguiente:

$R = \sqrt{5}$ y $\theta = 90º$, por lo que:

$a = \sqrt{5}\ \text{Cos}\ 90º = \sqrt{5}(0) = 0$ y $b = \sqrt{5}\ \text{Sen}\ 90º = \sqrt{5}(1) = \sqrt{5}$

Entonces

$Z_1 = \sqrt{5}\,i$ por lo que su conjugado es: $\overline{Z_1} = -\sqrt{5}\,i$, donde

$\left[\dfrac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right]$ y $\overline{Z_1}$ es necesario pasarlos a la forma polar por facilidad para la resolución. Por lo que:

$$\left[\frac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right] = -2 - 2\sqrt{3}i$$

Siendo que $r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

Y $\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}\right) = 240º$, por lo que:

$$\left[\frac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right] = 4\,\text{C}is\ 240º$$

Además si $\overline{Z_1} = -\sqrt{5}\,i$ su forma polar es: $a = 0$ y $b = -\sqrt{5}$

Por lo que: $r = \sqrt{(0)^2 + (-\sqrt{5})^2} = \sqrt{0 + 5} = \sqrt{5}$ y $\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\dfrac{-\sqrt{5}}{0}\right) = 270º$

Por lo tanto $\overline{\overline{Z_1}} = \sqrt{5}\ Cis\ 270º$

Con esta información:

$$\left[\frac{Z_3 + Z_2}{Z_4}\right]\overline{\overline{Z_1}} = (4\text{Cis } 240º)(\sqrt{5}\ \text{Cis } 270º) =$$

$$= (4)(\sqrt{5})\ \text{Cis}(240º + 270º) = 4\sqrt{5}\ \text{Cis } 510º = 4\sqrt{5}\,\text{Cis } 150º$$

Pero como se esta pidiendo que el resultado este a la cuarta potencia, entonces:

$Z^4 = = (4\sqrt{5}\ Cis\ 150º)^4$ que al aplicar la fórmula de De Moivre, resulta:

$Z^4 = (4\sqrt{5})^4\ Cis\ 4\ (150º) = 6{,}400\ Cis\ 240º$ en forma polar, y

$Z^4 = -3{,}200 - 5{,}542.563i$ en forma binómica.

6. Resolver la siguiente expresión: $(2 + 2\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{4}}$

Solución:

Si $Z = (2 + 2\sqrt{3}\,i)^{\frac{1}{4}}$, entonces hay que obtener las cuatro raíces de $Z = (2 + 2\sqrt{3}\,i)$ en forma polar.

Por lo que $a = 2$ y $b = 2\sqrt{3}$ de donde se obtienen r y θ, por lo que:

$$r = \sqrt{(2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$y\ \theta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = 60º$, por lo tanto $Z = 4\ Cis\ 60º$ en forma polar.

Aplicando la fórmula:

$$\omega = \sqrt[n]{r}\ \text{Cis}\ \frac{\theta + k(360^0)}{n},\ \text{con}\ \ k = 0, 1, 2, \bullet\bullet\bullet\bullet, (n-1)$$

Para obtener las raíces en forma polar, se obtiene lo siguiente:

La primera raíz es cuando $k = 0$

$\omega_0 = \sqrt[4]{4}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0 + (0)(360^0)}{4} = \sqrt[2]{2}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0}{4} = \sqrt{2}\ \text{Cis}\ 15^o$

La segunda es cuando $k = 1$

$\omega_1 = \sqrt[4]{4}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0 + (1)(360^0)}{4} = \sqrt[2]{2}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0 + 360^0}{4} =$

$= \sqrt{2}\ \text{Cis}\ \dfrac{420^0}{4} = \sqrt{2}\ \text{Cis}\ 105^o$

La tercera raíz es cuando $k = 2$

$\omega_2 = \sqrt[4]{4}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0 + (2)(360^0)}{4} = \sqrt[2]{2}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0 + 720^0}{4} =$

$= \sqrt{2}\ \text{Cis}\ \dfrac{780^0}{4} = \sqrt{2}\ \text{Cis}\ 195^o$

Y la cuarta raíz es cuando $k = 3$

$\omega_3 = \sqrt[4]{4}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0 + (3)(360^0)}{4} = \sqrt[2]{2}\ \text{Cis}\ \dfrac{60^0 + 1{,}080^0}{4} =$

$= \sqrt{2}\ \text{Cis}\ \dfrac{1{,}140^0}{4} = \sqrt{2}\ \text{Cis}\ 285^o$

7. Hallar todas las raíces de $\sqrt[5]{-32}$, representándolas gráficamente.

Solución:

Si $Z = \sqrt[5]{-32}$, entonces se trata de obtener las cinco raíces del número complejo en forma binómica de $Z = -32$ ya que $a = -32$ y $b = 0$.

Donde $r = \sqrt{(-32)^2 + (0)^2} = \sqrt{1024 + 0} = \sqrt{1024} = 32$

y $\theta = \text{Tan}^{-1}\left(\dfrac{0}{-32}\right) = 180^o$; siendo $Z = 32\ Cis\ 180^o$ su forma polar.

Siendo $Z = \sqrt[5]{-32} \approx \sqrt[5]{32 Cis 180^0}$ que al aplicar la fórmula:

$\omega = \sqrt[n]{r}\ Cis\ \dfrac{\theta + k(360^0)}{n}$, con $k = 0, 1, 2, \bullet\bullet\bullet\bullet, (n\text{-}1)$

Se obtienen las cinco raíces buscadas, como a continuación se indican.

Primera raíz cuando $k = 0$

$$\omega_0 = \sqrt[5]{32}\ Cis\ \frac{180^0 + (0)(360^0)}{5} = 2\ Cis\ \frac{180^0 + 0^0}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{180^0}{5} = 2\ Cis\ 36^o$$

Segunda raíz cuando $k = 1$

$$\omega_1 = \sqrt[5]{32}\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + (1)(360^0)}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + 360^0}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{540^0}{5} = 2\ Cis\ 108^o$$

Tercera raíz cuando $k = 2$

$$\omega_2 = \sqrt[5]{32}\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + (2)(360^0)}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + 720^0}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{900^0}{5} = 2\ \text{Cis}\ 180^o$$

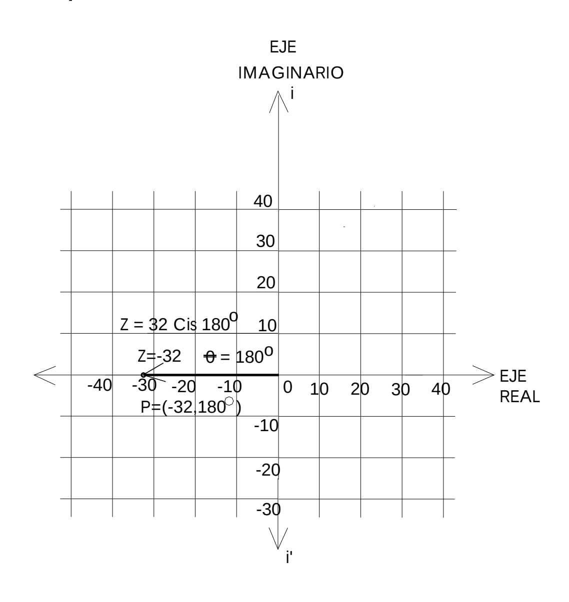
Cuarta raíz cuando $k = 3$

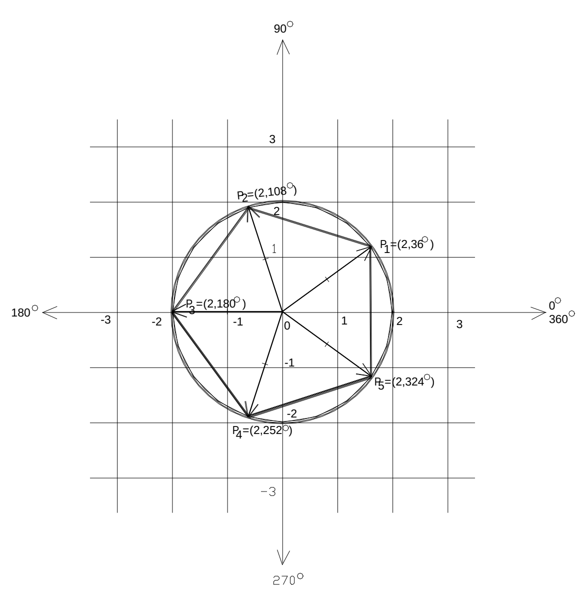
$$\omega_3 = \sqrt[5]{32}\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + (3)(360^0)}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + 1080^0}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{1,260^0}{5} = 2\ Cis\ 252^o$$

Y la quinta raíz cuando $k = 4$

$$\omega_4 = \sqrt[5]{32}\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + (4)(360^0)}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{180^0 + 1,440^0}{5} = 2\ \text{Cis}\ \frac{1,620^0}{5} = 2\ Cis\ 324^o$$

A continuación se presenta $Z = -32$ y la obtención de sus cinco raíces en forma polar.





2.4. FORMA EXPONENCIAL o DE EULER

El matemático suizo Leonardo Euler en el siglo XVIII desarrolló la fórmula matemática:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

A la vez que estableció la siguiente expresión:

$$e^{\theta i} = \text{Cos}\,\theta + \text{Sen}\,\theta\, i$$

Con la finalidad de representar al número complejo en forma polar $Z = r \text{ Cis } \theta$, como: $Z = r\, e^{\theta i}$, que es la fórmula de Euler la cual representa a los números complejos en forma exponencial. Donde, r sigue siendo el módulo del número complejo en forma polar, y θ el argumento el cual esta dado ahora en radianes: $0 \leq \theta < 2\pi$.

2.4.1. OPERACIONES ALGEBRAICAS

Las operaciones algebraicas que se realizan en los números complejos en forma de Euler o exponencial, tienen expresiones análogas a las operaciones de los números complejos en forma polar.

2.4.1.1. MULTIPLICACIÓN o PRODUCTO

Sean dos números complejos cualesquiera en forma de Euler o exponencial $Z_1 = r_1 e^{\theta_1 i}$ y $Z_2 = r_2 e^{\theta_2 i}$, efectuar el producto de $Z_1 Z_2$.

Por lo tanto $Z_1 Z_2 = \left(r_1 e^{\theta_1 i}\right)\left(r_2 e^{\theta_2 i}\right) = r_1 r_2 e^{(\theta_1 + \theta_2) i}$ recordando que θ esta en radianes.

Ejemplo:

Realizar la multiplicación de Z_1 y Z_2, si $Z_1 = 4e^{\frac{1}{4}\pi i}$ y $Z_2 = 2\, e^{\frac{1}{2}\pi i}$

Solución:

$$Z_1 Z_2 = \left(4\, e^{\frac{1}{4}\pi i}\right)\left(2\, e^{\frac{1}{2}\pi i}\right) = (4)(2)\, e^{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\pi i} = 8\, e^{\frac{3}{4}\pi i}$$

2.4.1.2. DIVISIÓN o COCIENTE

Si $Z_1 = e^{\theta_1 i}$ y $Z_2 = r_2\, e^{\theta_2 i}$ efectuar la división de $\frac{Z_1}{Z_2}$.

Por lo que $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{\theta_1 i}}{r_2 e^{\theta_2 i}} = \frac{r_1}{r_2}\, e^{(\theta_1 - \theta_2) i}$

Ejemplo:

Sean $Z_1 = 6\, e^{\frac{3}{2}\pi i}$ y $Z_2 = 3\, e^{2\pi i}$, realizar $\frac{Z_1}{Z_2}$

Solución:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{6e^{\frac{3}{2}\pi i}}{3e^{2\pi i}} = \frac{6}{3}e^{\left(\frac{3}{2}-\right)\pi i} = 2e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\pi i} = 2e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

2.4.1.3. POTENCIA ENÉSIMA DE Z

La potencia enésima de Z, que es representada por Z^n. esta definida por
:

$Z^n = Z\,Z\,Z \cdot \cdot \cdot\ Z$; donde $Z\,Z\,Z \cdot \cdot \cdot Z$ son n factores.

Si $Z = r\,e^{\theta i}$ se eleva a la potencia *n*, esta expresión queda representada por:

$Z^n = \left(r\,e^{\theta i}\right)^n = r^n\, e^{n\theta i}$ que es la fórmula para obtener potencias de un número complejo en forma de Euler.

Ejemplo:

Encontrar la tercera potencia de $Z = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$

Solución:

Si $Z = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$ y $n = 3$, entonces

$$Z^3 = \left(2e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^3 = (2)^3\, e^{3\left(\frac{3}{4}\right)\pi i} = 8e^{\frac{27}{4}\pi i}$$

2.4.1.4. RAÍCES DE NÚMEROS COMPLEJOS

Si se desea obtener las raíces de $r e^{\theta i}$ es necesario recurrir a la siguiente fórmula, donde *n* es el número de raíces a obtener.

$$\omega_k = \sqrt[n]{r e^{\theta i}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\theta + k(2\pi) i}{n}} \text{ para } k = 0,1,2,3, \ldots, n-1.$$

Ejemplo:

Obtener las raíces cúbicas de $8e^{\frac{1}{2}\pi i}$

Solución:

Si $Z = 8e^{\frac{1}{2}\pi i}$ y se desean obtener sus tres raíces cúbicas, para ello se emplea la fórmula: $\omega_k = \sqrt[n]{r e^{\theta i}} = \sqrt[n]{r}\, e^{\frac{\theta + k(2\pi) i}{n}}$ para $k = 0,1,2,3, \ldots, n-1.$ donde $n=3$

La primera raíz cuando k = 0, es

$$\omega_0 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\left(\frac{1}{2}+(0)(2)\right)\pi i}{3}} = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\left(\frac{1}{2}+0\right)\pi i}{3}} = 2e^{\frac{\frac{1}{2}\pi i}{3}} = 2e^{\frac{1}{6}\pi i}$$

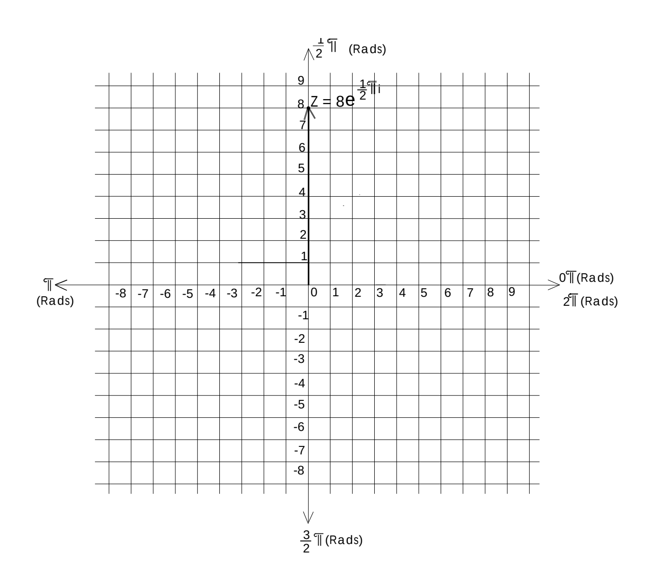
La segunda raíz cuando k = 1, es

$$\omega_1 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\left(\frac{1}{2}+(1)(2)\right)\pi i}{3}} = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\left(\frac{1}{2}+2\right)\pi i}{3}} = 2e^{\frac{\frac{5}{2}\pi i}{3}} = 2e^{\frac{5}{2}\pi i}$$

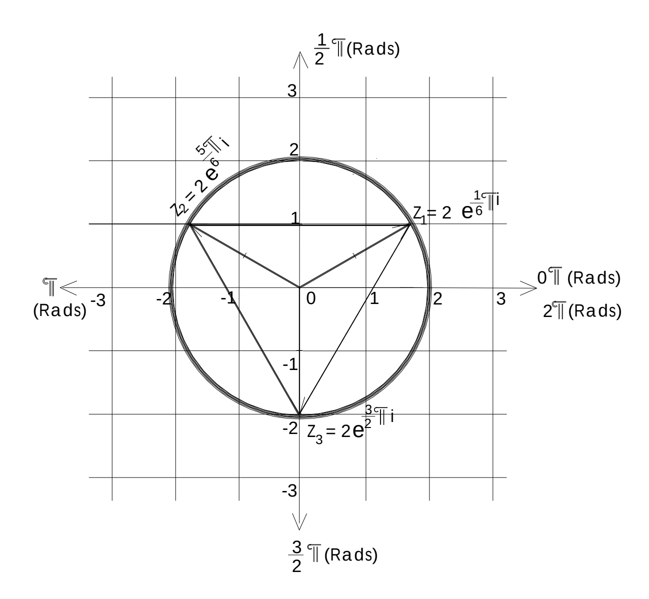
Y la tercera raíz cuando k = 2, es

$$\omega_2 = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\left(\frac{1}{2}+(2)(2)\right)\pi i}{3}} = \sqrt[3]{8}\, e^{\frac{\left(\frac{1}{2}+4\right)\pi i}{3}} = 2e^{\frac{\frac{9}{2}\pi i}{3}} = 2e^{\frac{9}{6}\pi i}$$

Gráficamente Z = $8e^{\frac{1}{2}\pi i}$ se representa de la siguiente manera.



Y la solución de sus tres raíces queda de la siguiente manera:



2.4.1.5. EJERCICIOS

1. Sean los siguientes números complejos en forma binómica, convertirlos a forma de Euler:

   $Z = 3 - 4i$; $Z = 5$; $Z = -1 + i$; $Z = 2\,i^5$; y, $Z = 3 + 6i$

Solución:

a) Si $Z = 2 - 4i$ que es de la forma binómica $Z = a + bi$, la forma de Euler es $Z = r\ Cis\ \theta$, por lo que es necesario obtener el módulo r y el argumento principal θ dado en radianes. Para ello es necesario obtener la forma polar $Z = r\ Cis\ \theta$, donde el ángulo θ esta dado en grados. Por lo que:

$a = 3$ y $b = -4i$ son los números reales, y, r y θ son los parámetros de un número complejo de la forma polar. Donde:

$r = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ que es el módulo

y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{3}\right) = 306.86º \approx 306º\ 52'\ 12''$ es el argumento o ángulo de inclinación, siendo su forma polar la siguiente: $Z = 5\ Cis\ 306.86º$

Ahora de la forma polar se puede para a la forma de Euler, es decir que r conserva el mismo valor pero θ su ángulo debe estar en radianes. Por lo tanto:

Si $\theta = 306.86º$ en forma polar, entonces $\theta = 1.7044\pi$ (radianes).

Siendo la forma de Euler de la siguiente manera:

$$Z = 5e^{1.7044\pi i\,(radianes)}$$

Por lo tanto:

$Z = 3 - 4i$ en forma binómica, y su representación en forma polar es $Z = 5\ \text{Cis}\ 306.86º$

b) Si $Z = 5$, donde $a = 5$ y $b = 0$, entonces:

$r = \sqrt{(5)^5 + (0)^2} = \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5$

y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{0}{5}\right) = 0º$

La forma binómica es $Z = 5$; La forma polar es $Z = 5\ Cis\ 0º$, y, la forma de Euler es: $Z = 5$, ya $\theta = (0)\pi\, radianes = 0\, radianes$ y $e^{\theta i} = e^{(0)i} = e^0 = 1$

c) Sea $Z = -1 + i$ (en forma binómica) su forma polar es la siguiente:

$a = -1$ y $b = 1$, entonces $r = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = 135º$

Por lo que: $Z = \sqrt{2}$ Cis 135º

Y la forma de Euler es: $Z = \sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i\,(radianes)}$

d) La forma de $Z = 2i^5$, no es binómica, pero si $i^5 = i$, entonces $Z = i$ que es la forma binómica, ya que: $a = 0$ y $b = 1$

Para obtener la forma polar es necesario realizar lo siguiente:

$r = \sqrt{(0)^2 + (1)^2} = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$

y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = 90º$

Por lo tanto $Z =$ 1 Cis *90º = Cis 90º*

Y para la forma de Euler es $Z = 1e^{\frac{1}{2}\pi i} = e^{\frac{1}{2}\pi i}$

e) Sea $Z = 3 + 6i$ un número complejo en forma binómica, donde: $a = 3$ y $b = 6$. Su forma polar es:

$r = \sqrt{(3)^2 + (6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

y $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{6}{3}\right) = 63.4349º \approx 63º\ 26'\ 06''$

Por lo que: $Z = 3\sqrt{5}$ *Cis* 63º 26' 06"

Siendo su forma de Euler: $Z = 3\sqrt{5}\,e^{0.3524\pi i}$

2. Resolver $Z^{\frac{2}{3}} = 8e^{3i}$

Solución:

$Z^{\frac{2}{3}} = 8e^{3i}$ que al despejar el exponente de la incógnita resulta:

$$Z = \left(8e^{3i}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{(8e^{3i})^{3}} = \sqrt{512e^{27i}}$$

Entonces: $Z = \left(512e^{27i}\right)^{\frac{1}{2}}$ por lo que hay que obtener sus dos raíces. Pero $27i(radianes) = 8.5943\pi i(radianes)$

Por lo que la primera raíz para cuando $k = 0$ es:

$$\omega_0 = \sqrt{512}\,e^{\left(\frac{8.5943\pi + (0)(2\pi)}{2}\right)i} = 22.6274e^{4.2972\pi i}$$

Y para la segunda raíz cuando $k = 1$ es:

$$\omega_1 = \sqrt{512}\,e^{\left(\frac{8.594\pi + (1)(2\pi)}{2}\right)i} = 22.6274e^{5.2972\pi i}$$

3. Se conocen los valores de los siguientes números complejos:

$Z_1 = -2 + 2$ i, $Z_2 = 5$ *Cis 130º*, y $Z_3 = 2e^{\frac{3}{4}\pi i}$. Resolver la siguiente expresión:

$$Z_2 = \frac{Z_3\,Z_1}{Z^{\frac{3}{4}}}$$

Solución:

La incógnita de esta expresión es Z, por lo que es necesario despejarla.

$$Z^{\frac{3}{4}} = \frac{Z_3\,Z_1}{Z_2}$$

Para la resolución de este ejercicio es necesario realizar el siguiente procedimiento:

1º. Resolver $Z_3\ Z_1$ en forma polar.

Si $Z_3 = 2\,e^{\frac{3}{4}\pi i}$ y $Z_1 = -2 + 2i$, entonces:

$Z_3 = 2\ Cis\ 135º$ y $Z_1 = 2\sqrt{2}\ Cis\ 225º$, por lo que:

$Z_3\ Z_1 = (2\ Cis\ 135º)(2\sqrt{2}\ Cis\ 225º) = 4\sqrt{2}\ Cis\ 360º$

2º. Efectuar :

$\frac{Z_3\,Z_1}{Z_2}$ ya que $Z_2 = 5\ Cis\ 130º$ por lo que:

$$\frac{Z_3\,Z_1}{Z_2} = \frac{4\sqrt{2}\ Cis\ 360^0}{5\ Cis\ 130^0} =$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{5}\ Cis\ (360º - 130º) = \frac{4\sqrt{2}}{5}\ \ Cis\ 230º$$

3º. De Z_4 despejar el exponente $\frac{1}{4}$ para que quede la expresión algebraica de la siguiente forma: $Z^3 = \left(\frac{Z_3 Z_1}{Z_2}\right)^4$ por lo que:

$$Z^3 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\ Cis\ 230^o\right)^4$$ que por Moivre resulta:

$$Z^3 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{5}\right)^4 Cis\left[(4)(230^o)\right] = \frac{1{,}024}{625}\ Cis\ 920^o = 1{,}6384\ Cis\ 200^o$$

4º. Obtener las tres raíces de Z_4, aplicando la fórmula:

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\ \text{Cis}\ \frac{\theta + k(360^0)}{n},\ \text{con}\quad k = 0, 1, 2, \bullet\bullet\bullet\bullet, (n-1)$$

Donde: $n = 3$ y $\theta = 200^0$

Por lo que la primera raíz cuando $k = 0$, es:

$$\omega_0 = \sqrt[3]{1{,}6384}\ Cis\ \frac{200 + (0)(360^{o})}{3} = 1.1787\ Cis\ 66.6667^{o}$$ en forma polar.

Para la segunda raíz cuando $k = 1$, es:

$$\omega_1 = \sqrt[3]{1{,}6384}\ Cis\ \frac{200 + (1)(360^{o})}{3} = 1.1787\ Cis\ 186.6667^{o}$$ en forma polar.

Y para la tercera raíz cuando $k = 2$, es:

$$\omega_2 = \sqrt[3]{1{,}6384}\ Cis\ \frac{200 + (2)(360^{o})}{3} = 1.1787\ Cis\ 306.6667^{o}$$ en forma polar.

Estos resultados se pueden convertir en:

$\omega_0 = 1.1787 e^{0.3704\pi i}$ que es la primera raíz en forma de Euler.
$\omega_1 = 1.1787 e^{1.3704\pi i}$ que es la segunda raíz en forma de Euler
y $\omega_2 = 1.1787 e^{1.1787\pi i}$ que es la tercera raíz en forma de Euler.

O en su caso:

$\omega_0 = 0.4669 + 1.0823\, i$ que es la primera raíz en forma binómica.
$\omega_1 = -1.1707 - 0.1368\, i$ que es la segunda raíz en forma binómica
y $\omega_2 = 0.7039 - 0.9455\, i$ que es la tercera raíz en forma binómica.

3. BIBLIOGRAFÍA

Solar González, Eduardo
ÁLGEBRA I
LIMUSA NORIEGA EDITORES, 1999.

Apuntes de ÁLGEBRA
SECCIÓN DE MATEMÁTICAS
FACULTAD DE INGENIERÍA, UNAM, 1976.

Apostol, Tom M.
CALCULUS, Vol. I, Segunda edición
Editorial reverté, s. a. 1999.

Gustafson, R. David
Álgebra Intermedia
Internacional Thomson Editores, S.A. de C.V. 1997.

Swokoski, Earl W.
Álgebra y trigonometría con geometría analítica
Internacional Thomson Editores, S.A. de C.V. 1998.